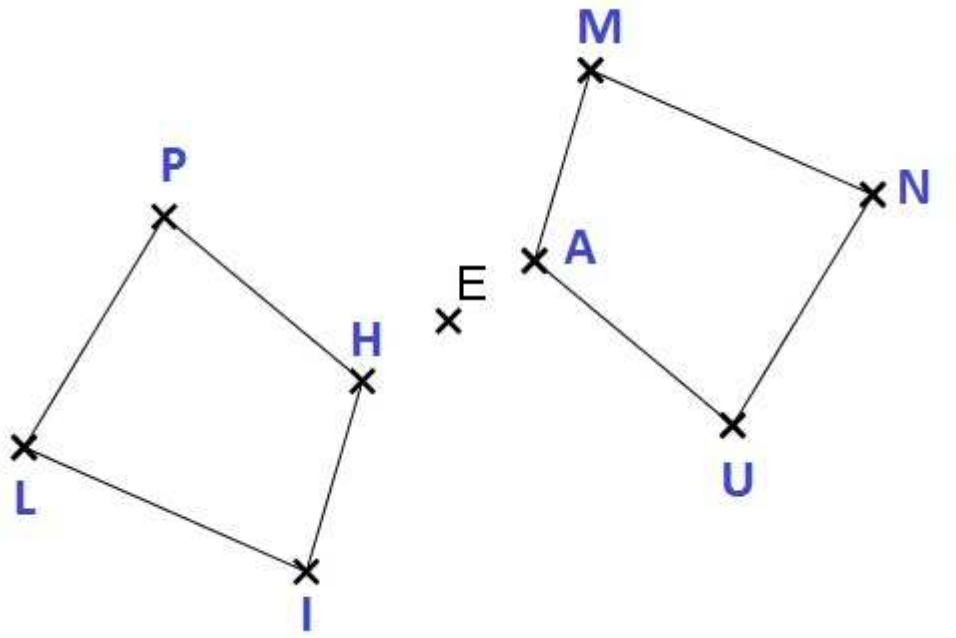
EXERCICES : Utiliser les propriétés de la symétrie centrale pour démontrer

Pour les exercices 1 à 11, on utilisera, après l'avoir reproduite, la figure ci-dessous où les quadrilatères PHIL et MNUA sont symétriques par rapport au point O.



Exercice 1
On donne PL = 4 cm, LI = 3 cm, IH = 1,5 cm et HP = 2,5 cm.
Déterminer la longueur MA. Justifier la réponse.

Exercice 2
On donne PL = 5 cm, LI = 4 cm, et $\widehat{LIH} = 80°$.
Quelles mesures du quadrilatère MNUA peut on alors déterminer ? Justifier la réponse.

Exercice 3
On donne PL = 5 m, LI = 4,1 m, IH = 2,5 m et HP = 4,8 m.
Déterminer le périmètre du quadrilatère MNUA. Justifier la réponse.

Exercice 4
On donne $\widehat{PLI} = 90°$.
Démontrer que les droites (MN) et (NU) sont perpendiculaires.

Exercice 5
L'aire du quadrilatère MNUA est 3 m².
Quelle est l'aire du quadrilatère PHIL ? Justifier la réponse.

Exercice 6
Prouver que le point E est le milieu du segment [PU].

Exercice 7
Démontrer que les droites (PL) et (NU) sont parallèles.

Exercice 8
Déterminer un segment qui a la même longueur que le segment [LM]. Justifier la réponse.

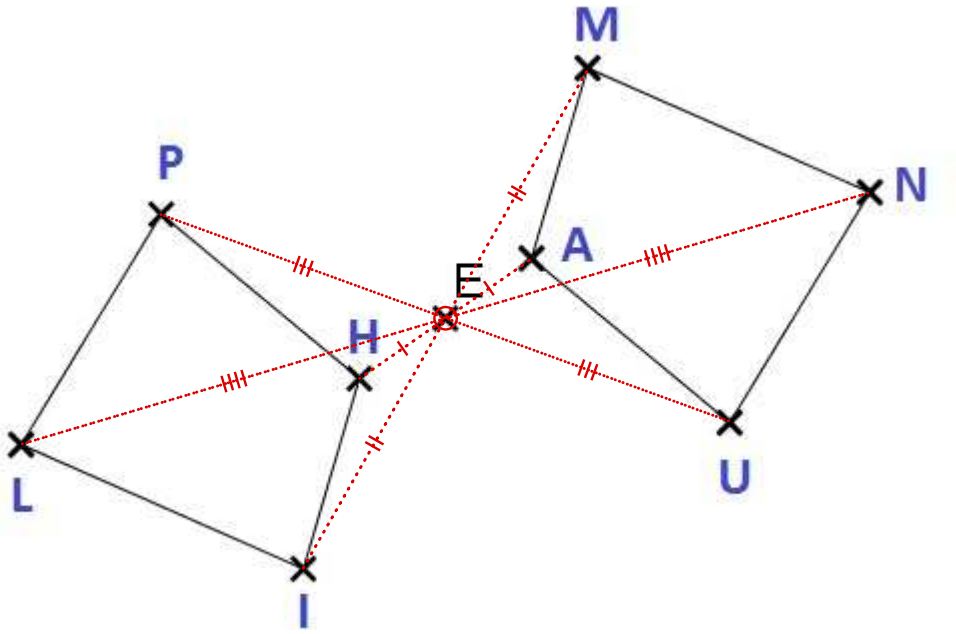
Exercice 9
Les diagonales du quadrilatère PHIL sont perpendiculaires.
Démontrer que les droites (AN) et (MU) sont perpendiculaires.

Exercice 10
B est un point de la droite (LI).
Le point D est le symétrique du point B par rapport au point E.
Démontrer que le point D appartient à la droite (MN).

Exercice 11
On appelle X le point d'intersection des diagonales du quadrilatère PHIL.
On appelle Y le symétrique de X par rapport au point E.
Démontrer que Y est le point d'intersection des diagonales du quadrilatère MNUA.

CORRECTION — Utiliser les propriétés de la symétrie centrale pour démontrer

Correspondance des points (d'après la figure) : P ↔ U, H ↔ A, I ↔ M, L ↔ N. Le centre de symétrie est noté O dans la consigne et E sur la figure : c'est le même point. Chaque point et son symétrique sont alignés avec ce centre, à égale distance de lui (codage sur la figure).



Exercice 1

On sait que les quadrilatères PHIL et MNUA sont symétriques par rapport au point O, et que M est le symétrique de I et A le symétrique de H : le segment [MA] est donc le symétrique du segment [IH].
Or la symétrie centrale conserve les longueurs.
Donc MA = IH = **1,5 cm**.

Exercice 2

On sait que les quadrilatères PHIL et MNUA sont symétriques par rapport au point O : les symétriques de P, L, I et H sont U, N, M et A. On connaît PL = 5 cm, LI = 4 cm et ∠LIH = 80°.
Or la symétrie centrale conserve les longueurs et les mesures d'angles.
Donc UN = PL = **5 cm**, NM = LI = **4 cm** et ∠NMA = ∠LIH = **80°**. On ne peut pas déterminer les autres mesures (MA, AU et les autres angles) : les données ne suffisent pas.

Exercice 3

On sait que les quadrilatères PHIL et MNUA sont symétriques par rapport au point O, avec PL = 5 m, LI = 4,1 m, IH = 2,5 m et HP = 4,8 m.
Or la symétrie centrale conserve les longueurs : UN = PL = 5 m ; NM = LI = 4,1 m ; MA = IH = 2,5 m ; AU = HP = 4,8 m.
Donc le périmètre de MNUA est 5 + 4,1 + 2,5 + 4,8 = **16,4 m** (c'est aussi celui de PHIL).

Exercice 4

On sait que les quadrilatères PHIL et MNUA sont symétriques par rapport au point O : l'angle ∠PLI a pour symétrique l'angle ∠UNM (P → U, L → N, I → M), et ∠PLI = 90°.
Or la symétrie centrale conserve les mesures d'angles.
Donc ∠UNM = ∠PLI = 90° : les droites (NU) et (NM), c'est-à-dire (MN) et (NU), sont **perpendiculaires**.

Exercice 5

On sait que les quadrilatères PHIL et MNUA sont symétriques par rapport au point O et que l'aire de MNUA est 3 m².
Or la symétrie centrale conserve les aires.
Donc l'aire de PHIL est aussi de **3 m²**.

Exercice 6

On sait que les quadrilatères PHIL et MNUA sont symétriques par rapport au point E : le symétrique du point P est le point U.
Or si deux points sont symétriques par rapport à un point, alors ce point est le milieu du segment qui les joint.
Donc E est le **milieu du segment [PU]**.

Exercice 7

On sait que le symétrique de P est U et le symétrique de L est N par rapport à E : la droite symétrique de (PL) est la droite (UN).
Or une droite et sa symétrique par rapport à un point sont parallèles.
Donc les droites (PL) et (NU) sont **parallèles**.

Exercice 8

On sait que les symétriques des points L et M par rapport à E sont respectivement N et I (car I a pour symétrique M) : le segment [NI] est donc le symétrique du segment [LM].
Or la symétrie centrale conserve les longueurs.
Donc le segment **[NI]** a la même longueur que [LM] : NI = LM.

Exercice 9

On sait que les diagonales (PI) et (HL) de PHIL sont perpendiculaires ; leurs symétriques par rapport à E sont (UM) et (AN), qui sont les diagonales de MNUA.
Or la symétrie centrale conserve les angles, donc l'angle droit formé par (PI) et (HL) a pour symétrique un angle droit.
Donc les droites (AN) et (MU) sont **perpendiculaires**.

Exercice 10

On sait que B appartient à la droite (LI), que D est le symétrique de B par rapport à E, et que la symétrique de (LI) est la droite (NM) (L → N et I → M).
Or le symétrique d'un point d'une droite appartient à la droite symétrique.
Donc D appartient à la droite **(MN)**.

Exercice 11

On sait que X est le point d'intersection des diagonales [PI] et [HL] de PHIL, et que Y est le symétrique de X par rapport à E. Les symétriques de [PI] et [HL] sont [UM] et [AN].
Or le symétrique d'un point d'un segment appartient au segment symétrique : $X \in [PI]$ donc $Y \in [UM]$, et $X \in [HL]$ donc $Y \in [AN]$.
Donc Y est sur les deux diagonales [MU] et [NA] de MNUA, qui n'ont qu'un seul point commun : Y est le **point d'intersection des diagonales** de MNUA.